第 2 节 规则几何体的结构计算（★★★）

强化训练

类型 I：规则几何体计算

1．（2023 • 河南周口模拟 • ★★）已知ΔABC是边长为 3 的等边三角形，其顶点都在球O的球面上，若球O的体积为$\dfrac{32\pi}{3}$，则球心O到平面ABC的距离为（　　）

（A）$\sqrt{3}$　　（B）$\dfrac{3}{2}$　　（C）1　　（D）$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

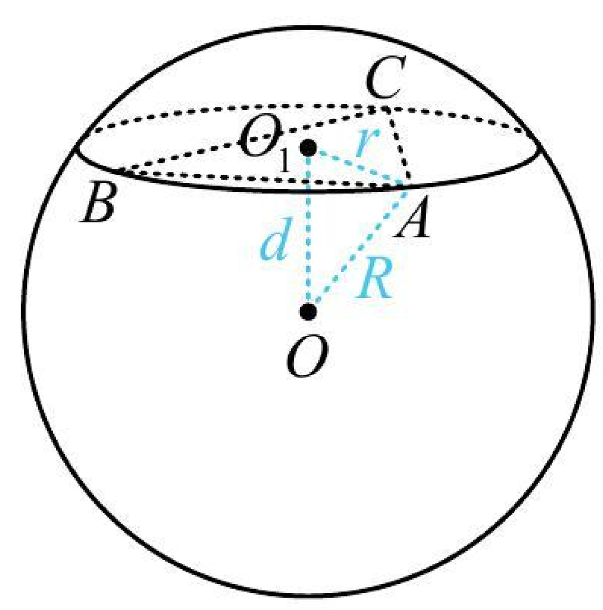
答案： C

解析： 球心到截面的距离即为球心和截面圆圆心之间的线段长，故连接球心O和ΔABC的外心O_1，

设ΔABC的外接圆半径为r，由正弦定理，$\dfrac{AB}{\sin C}=\dfrac{3}{\sin 60^{\circ}}=2r$，所以$r=\sqrt{3}$，

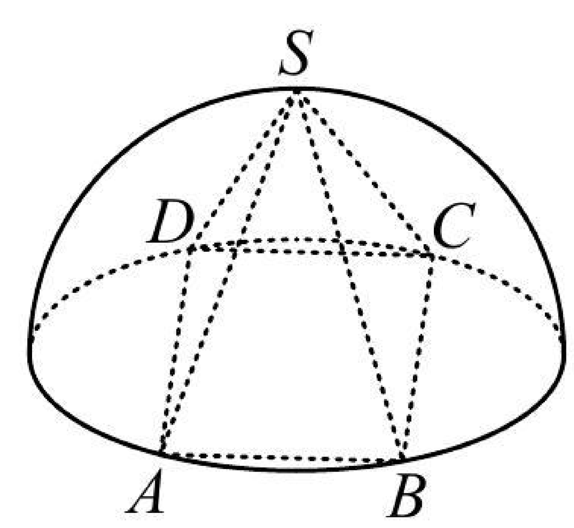
如图，由球的性质，$OO_1\perp$平面ABC，所以$OO_1\perp O_1A$，

球O的体积$V=\dfrac{4}{3}\pi R^3=\dfrac{32\pi}{3}\Rightarrow R=2$，故$O$到平面$ABC$的距离$d=\sqrt{OA^2-O_1A^2}=\sqrt{R^2-r^2}=1$.



2．（2023 • 天津模拟 • ★★）如图，半球内有一内接正四棱锥$S-ABCD$，该四棱锥的体积为$\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$，则该半球的体积为（　　）

（A）$\dfrac{\sqrt{2}}{3}\pi$　　（B）$\dfrac{4\sqrt{2}}{9}\pi$　　（C）$\dfrac{4\sqrt{2}}{3}\pi$　　（D）$\dfrac{8\sqrt{2}}{3}\pi$

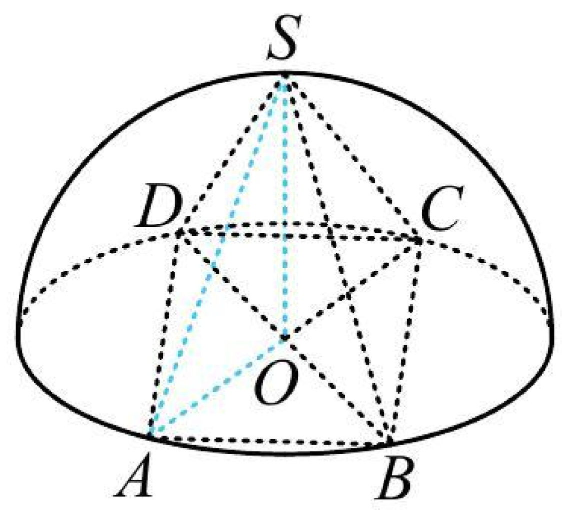


答案： C

解析： 涉及正四棱锥，先作高，由于要算球的半径，故分析包含高SO和半径OA的截面SOA，

如图，设球的半径为R，则$SO=OA=R$，$AB=\sqrt{2}R$，正四棱锥的体积$V=\dfrac{1}{3}\times(\sqrt{2}R)^2\times R=\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$，

所以 $R=\sqrt{2}$，故半球的体积为 $\frac{1}{2}\times\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{4\sqrt{2}}{3}\pi$.



3.（2023·天津模拟·★★）侧棱长为 2 的正三棱锥，若其底面周长为 9，则该正三棱锥的体积是（　　）

（A）$\frac{9\sqrt{3}}{2}$　（B）$\frac{3\sqrt{3}}{4}$　（C）$\frac{3\sqrt{3}}{2}$　（D）$\frac{9\sqrt{3}}{4}$

答案：B

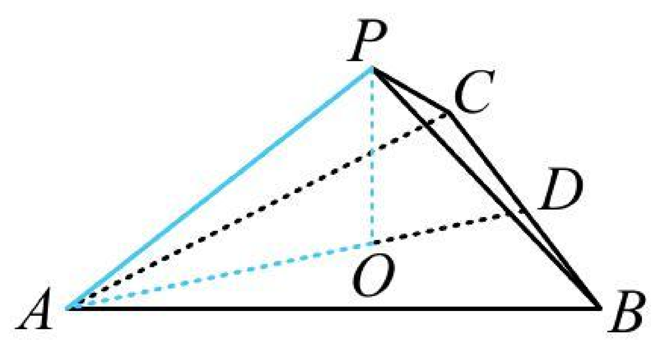
解析：如图，不妨设 $PA=PB=PC=2$，ΔABC 是正三角形，由题意，其周长为 9，所以 $AB=BC=AC=3$，

因为已知侧棱，所以研究高和侧棱构成的截面，

作 $PO\perp$ 平面 ABC 于点 O，则 O 是 ΔABC 的中心，连接 AO 并延长，交 BC 于点 D，则 D 为 BC 中点，

所以 $AO=\frac{2}{3}AD=\frac{2}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times 3=\sqrt{3}$，故 $OP=\sqrt{PA^2-AO^2}=1$，

所以 $V_{P-ABC}=\frac{1}{3}S_{\Delta ABC}\cdot OP=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times 3\times 3\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times 1=\frac{3\sqrt{3}}{4}$.



【反思】正三角形外心也是重心，它分中线之比为 2:1，故本题 $AO=\frac{2}{3}AD$，我们常据此速求外接圆半径 OA.

4.（2023·全国乙卷·★★★）已知圆锥 PO 的底面半径为 $\sqrt{3}$，O 为底面圆心，PA，PB 为圆锥的母线，$\angle AOB=120^{\circ}$，若 ΔPAB 的面积等于 $\frac{9\sqrt{3}}{4}$，则该圆锥的体积为（　　）

（A）π　（B）$\sqrt{6}\pi$　（C）3π　（D）$3\sqrt{6}\pi$

答案：B

解析：先翻译条件中的 $S_{\Delta PAB}$，由于不知道角，所以用“$\frac{1}{2}\times$底$\times$高”，AB 在 ΔAOB 中好求，故若以 AB 为底，则可求出高 PQ，接下来方向就明确了，只需研究高 PQ 所在的截面，

在 ΔAOB 中，由余弦定理，$AB^2=OA^2+OB^2-$
$2OA\cdot OB\cdot\cos\angle AOB=9$，所以 $AB=3$，

取 AB 中点 Q，连接 PQ，OQ，则 $OQ\perp AB$，$PQ\perp AB$，

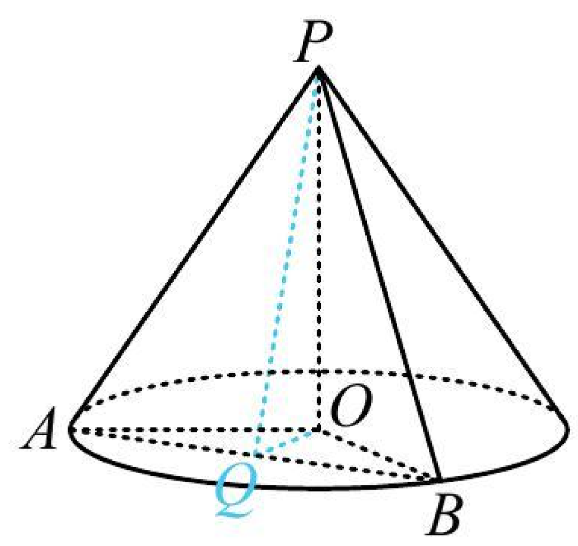
所以 $S_{\Delta PAB}=\frac{1}{2}AB\cdot PQ=\frac{1}{2}\times 3\times PQ=\frac{3}{2}PQ$，

又 $S_{\Delta PAB}=\dfrac{9\sqrt{3}}{4}$，所以 $\dfrac{3}{2}PQ=\dfrac{9\sqrt{3}}{4}$，故 $PQ=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$，

在 ΔAOQ 中，$\angle AOQ=\dfrac{1}{2}\angle AOB=60^{\circ}$，

所以 $OQ=OA\cdot\cos\angle AOQ=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，故 $OP=\sqrt{PQ^2-OQ^2}=\sqrt{6}$，

所以圆柱 PO 的体积 $V=\dfrac{1}{3}\pi\times(\sqrt{3})^2\times\sqrt{6}=\sqrt{6}\pi$.



5.（2023 • 重庆模拟 • ★★★）圆台上、下底面圆的圆周都在一个半径为 5 的球面上，其上、下底面圆的周长分别为 8π 和 10π，则该圆台的侧面积为（　　）

（A）$8\sqrt{10}\pi$　（B）$8\sqrt{11}\pi$　（C）$9\sqrt{10}\pi$　（D）$9\sqrt{11}\pi$

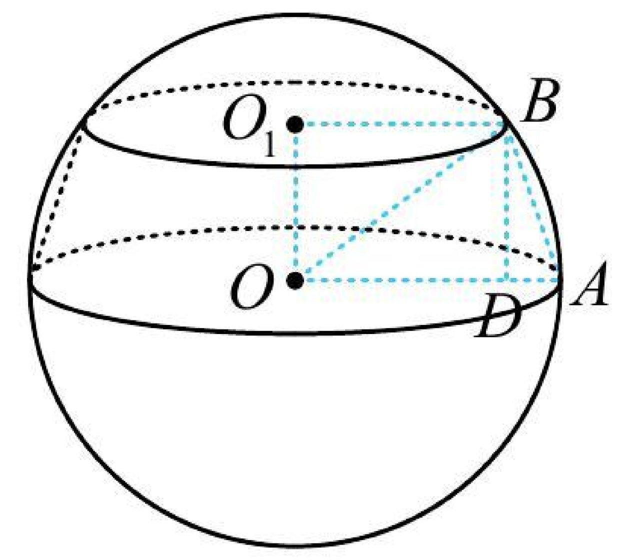
答案：C

解析：如图，圆台和球都是旋转体，到任意的过轴的截面分析均可，不妨选取图中的截面 OO_1BA 来看，

由题意，$\begin{cases}2\pi\cdot O_1B=8\pi\\2\pi\cdot OA=10\pi\end{cases}$，所以 $\begin{cases}O_1B=4\\OA=5\end{cases}$，上下底半径有了，求圆台侧面积还差母线长 AB，

作 $BD\perp OA$ 于 D，则 $OD=O_1B=4$，$AD=OA-OD=1$，$OB=5$，$OO_1=\sqrt{OB^2-O_1B^2}=3$，

所以 $BD=3$，$AB=\sqrt{BD^2+AD^2}=\sqrt{10}$，故圆台的侧面积 $S=\pi(r_1+r_2)l=\pi\times(4+5)\times\sqrt{10}=9\sqrt{10}\pi$.



6.（2023 • 新高考 I 卷 • ★★★）在正四棱台 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB=2$，$A_1B_1=1$，$AA_1=\sqrt{2}$，则该棱台的体积为_____.

答案：$\dfrac{7\sqrt{6}}{6}$

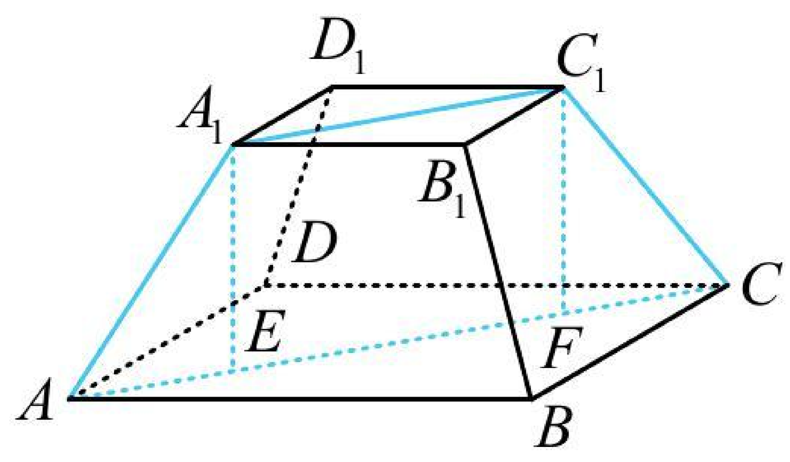
解析：求正四棱台的体积只差高，由于知道侧棱长，故在包含高和侧棱的截面 AA_1C_1C 中来分析，

设正四棱台的高为 h，如图，作 $A_1E\perp AC$ 于点 E，$C_1F\perp AC$ 于点 F，则 $A_1E=C_1F=h$，

因为 $A_1B_1=1$，$AB=2$，所以 $EF=A_1C_1=\sqrt{2}$，$AC=2\sqrt{2}$，$AE=\dfrac{1}{2}(AC-EF)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

又 $AA_1=\sqrt{2}$，所以 $A_1E=\sqrt{AA_1^2-AE^2}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$，故 $h=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$，正四棱台的上、下底面积分别为 $S'=1$，$S=4$，

所以正四棱台的体积$V=\frac{1}{3}(S+S'+\sqrt{SS'})h=\frac{7\sqrt{6}}{6}$.



7．（2021·新高考Ⅱ卷·★★★）北斗三号全球卫星导航系统是我国航天事业的重要成果. 卫星导航系统中，地球静止同步轨道卫星的轨道位于地球赤道所在平面，轨道高度为36000km（轨道高度指卫星到地球表面的最短距离），把地球看成一个球心为O，半径r为6400km的球，其上点A的纬度是指OA与赤道所在平面所成角的度数，地球表面能直接观测到一颗地球静止同步轨道卫星的点的纬度的最大值记为α，该卫星信号覆盖的地球表面面积$S=2\pi r^2(1-\cos\alpha)$，（单位：km^2），则S占地球表面积的百分比为（　　）

（A）26%　　（B）34%　　（C）42%　　（D）50%

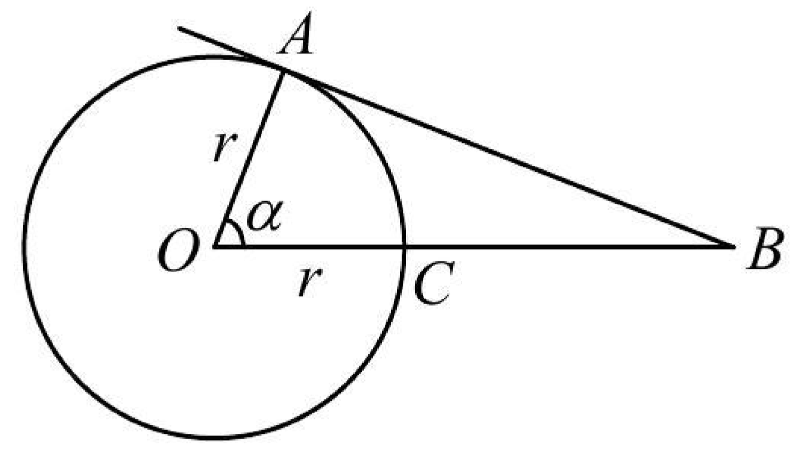
答案：C

解析：读完题发现要求的百分比是$\frac{2\pi r^2(1-\cos\alpha)}{4\pi r^2}=\frac{1-\cos\alpha}{2}$，所以只需求$\alpha$，可画剖面图来看，

如图，同步卫星位于点B处，点A是地球上能观测到该同步卫星的纬度最大的点，其中AB与圆O相切，则$\angle AOB=\alpha$且$OA\perp AB$，设线段OB与球O表面交于点C，则$OC=r=6400$，$BC=36000$，

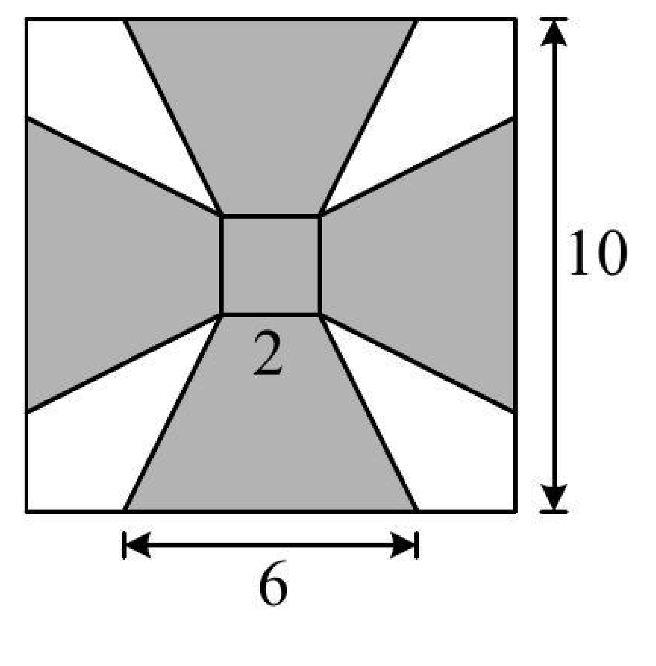
所以$\cos\alpha=\frac{OA}{OB}=\frac{6400}{6400+36000}\approx 0.151$，从而$\frac{1-\cos\alpha}{2}\approx\frac{1-0.151}{2}=0.4245\approx 0.42$，

故S占地球表面积的百分比为42%.



8．（2023·云南红河州一模·★★★★）如图所示是一块边长为10cm的正方形铝片，其中阴影部分由四个全等的等腰梯形和一个正方形组成，将阴影部分裁剪下来，并将其拼接成一个无上盖的容器（铝片厚度不计），则该容器的容积为（　　）

（A）$\frac{80\sqrt{3}}{3}cm^3$　　（B）$\frac{104\sqrt{3}}{3}cm^3$　　（C）$80\sqrt{3}cm^3$　　（D）$104\sqrt{3}cm^3$



答案：B

解析：可以想象拼接后的容器是正四棱台，上、下底面边长分别为2和6，斜高为4，如图1，正四棱台如

图 2，

要求体积，还需算高 OG，已知斜高，故在截面 $OGIE$ 中分析，其中 I，G 分别为所在棱中点，

作 $IT \perp OE$ 于 T，则 $OT = IG = 1$，$TE = OE - OT = 3 - 1 = 2$，$IE = 4$，

在 ΔITE 中，$IT = \sqrt{IE^2 - TE^2} = 2\sqrt{3}$，所以 $OG = IT = 2\sqrt{3}$，

故正四棱台的体积 $V = \dfrac{1}{3} \times (2\times2 + 6\times6 + \sqrt{2\times2\times6\times6}) \times 2\sqrt{3} = \dfrac{104\sqrt{3}}{3}$.

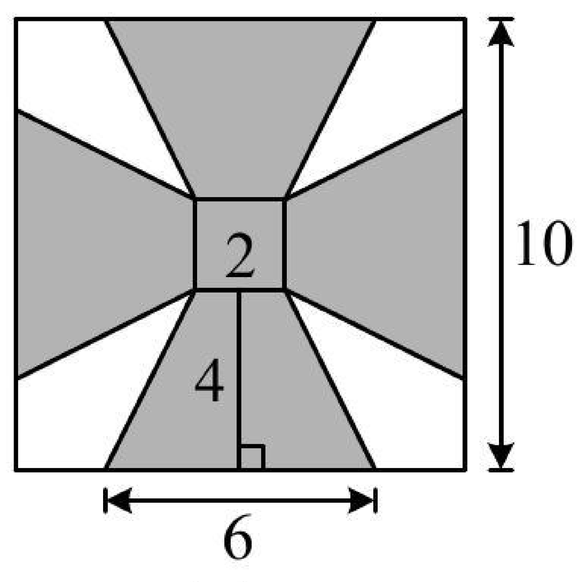


图1

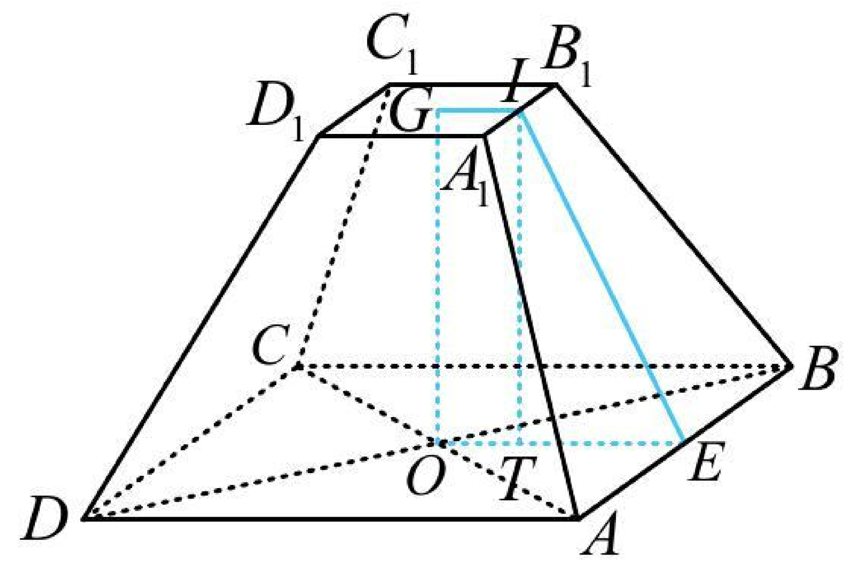
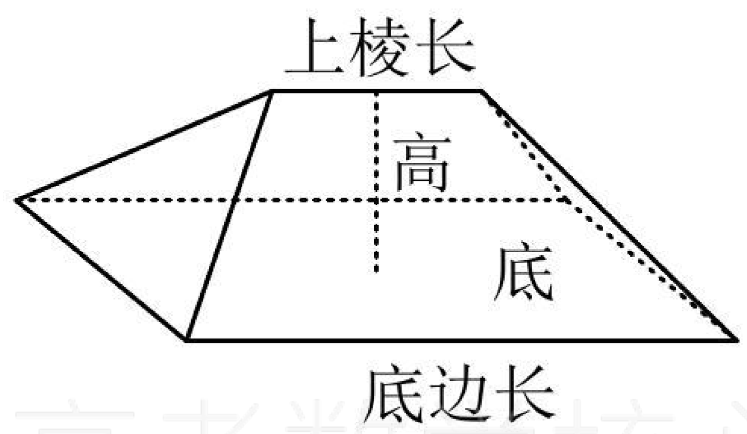


图2

9.（2022 • 江苏连云港模拟 • ★★★★）刍甍是中国古代算数中的一种几何体，其结构特征是：底面为长方形，上棱和底面平行，且长度不等于底面平行的棱长的五面体，是一个对称的楔形体，如图.



已知一个刍甍底边长为 6，底边宽为 4，上棱长为 2，高为 2，则它的表面积为（　　）

（A）$24\sqrt{2}$　　（B）$24 + 24\sqrt{2}$　　（C）$24 + 24\sqrt{5}$　　（D）$24 + 16\sqrt{2} + 8\sqrt{5}$

答案：B

解析：如图，由题意，$AB = 4$，$BB_1 = 6$，$CC_1 = 2$，$ED = 2$，其中 E 为 CC_1 中点，D 为底面中心，

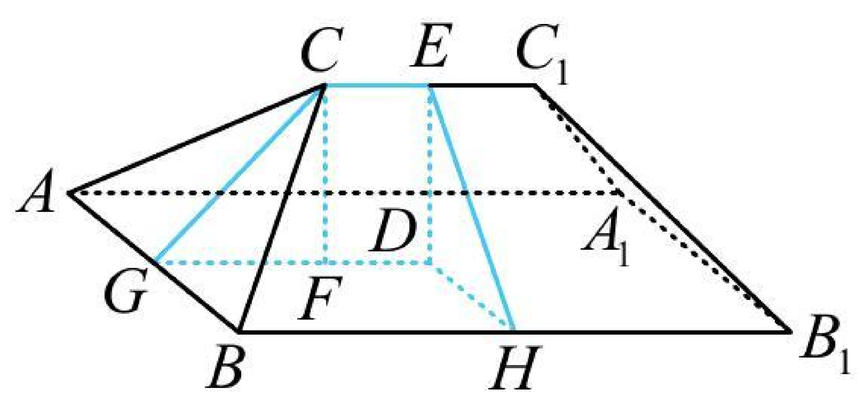
由对称性，左右三角形面积相等，前后等腰梯形面积也相等，各算一个面积即可，计算都需要各自的高，于是在包含刍甍的高以及两个斜高 CG、EH 的截面 $CGDE$ 和 EDH 中分析，

由图可知，$DF = CE = \dfrac{1}{2} CC_1 = 1$，$DG = \dfrac{1}{2} BB_1 = 3$，$GF = DG - DF = 2$，$CF = ED = 2$，

所以 $CG = \sqrt{CF^2 + GF^2} = 2\sqrt{2}$，故 $S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2} AB \cdot CG = \dfrac{1}{2} \times 4 \times 2\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$，

又 $DH = \dfrac{1}{2} AB = 2$，$EH = \sqrt{ED^2 + DH^2} = 2\sqrt{2}$，所以 $S_{BB_1C_1C} = \dfrac{1}{2}(CC_1 + BB_1) \cdot EH = \dfrac{1}{2} \times (2+6) \times 2\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$，

又底面 ABB_1A_1 的面积 $S_{ABB_1A_1} = 4 \times 6 = 24$，故所给刍甍的表面积 $S = 24 + 2\times4\sqrt{2} + 2\times8\sqrt{2} = 24 + 24\sqrt{2}$.



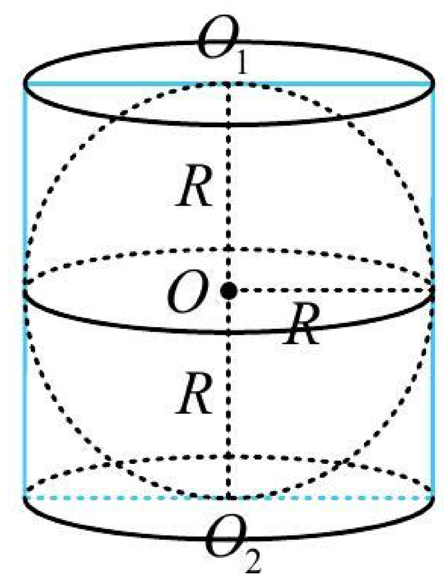
类型Ⅱ：内切球问题

10．（2017 • 江苏卷 • ★★）圆柱的上下底面圆的圆心分别为O_1，O_2，圆柱内有一个球，该球与上、下底面和母线均相切，记圆柱的体积为V_1，球的体积为V_2，则$\frac{V_1}{V_2}=$______.

答案：$\frac{3}{2}$

解析：球和圆柱都是旋转体，分析任意过轴的截面都行，不妨考虑图中的蓝色截面，

如图，设球的半径为 R，则圆柱的底面半径为 R，高为 $2R$，所以$\frac{V_1}{V_2}=\frac{\pi R^2\cdot 2R}{\frac{4}{3}\pi R^3}=\frac{3}{2}$.



11.（2023 • 山东潍坊模拟 • ★★★）已知圆锥的底面半径为 2，高为$4\sqrt{2}$，则该圆锥内切球的表面积为（　　）

（A）4π　（B）8π　（C）16π　（D）32π

答案：B

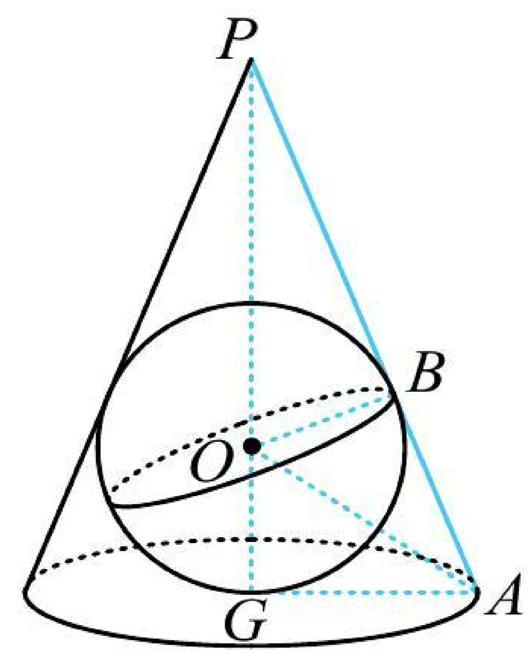
解析：由于球和圆锥都是旋转体，分析过轴的任意截面都行，不妨到截面 PGA 中考虑，

如图，设球心为 O，半径为 R，则$OB=OG=R$，由切线长相等可知，$AB=AG=2$，

由题意，$PG=4\sqrt{2}$，$PA=\sqrt{PG^2+AG^2}=6$，所以$OP=4\sqrt{2}-R$，$PB=PA-AB=4$，

在ΔPOB中，由$OB^2+PB^2=OP^2$可得$R^2+16=(4\sqrt{2}-R)^2$，解得：$R=\sqrt{2}$，

所以该圆锥内切球的表面积$S=4\pi R^2=8\pi$.



12.（2016 •新课标III卷 •★★★★）在封闭的直三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$内有一个体积为 V 的球，若$AB\perp BC$，$AB=6$，$BC=8$，$AA_1=3$，则 V 的最大值是（　　）

（A）4π　（B）$\frac{9\pi}{2}$　（C）6π　（D）$\frac{32\pi}{3}$

答案：B

解析：应先分析最大的球是和侧面（面ACC_1A_1、面BCC_1B_1、面ABB_1A_1）相切，还是与底面（面 ABC、面$A_1B_1C_1$）相切？可求出两种情况下球的半径，取较小的，下面先画剖面图分析球与三个侧面相切的情形，

如图 1（内部的球未画出），其中$\Delta A_2B_2C_2\cong\Delta ABC$，由题意，$AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=10$，

过三个切点的剖面图如图 2，图 2 中 $B_2P=NQ=r$，所以 $PC_2=8-r$，由切线长相等，$C_2M=PC_2=8-r$，又 $B_2Q=PN=r$，所以 $A_2Q=6-r$，由切线长相等， $A_2M=A_2Q=6-r$，

所以 $A_2C_2=C_2M+A_2M=8-r+6-r=14-2r=10\Rightarrow r=2$，故当球与三个侧面相切时，球的半径为 2，

再看球与两个底面相切的情形，此时球的直径应等于三棱柱的高，

当球与两个底面相切时，其半径为 $r'=\dfrac{1}{2}AA_1=\dfrac{3}{2}$，

因为 $r'<r$，所以最大的球应与两个底面相切，故其体积为 $V=\dfrac{4}{3}\pi\times(\dfrac{3}{2})^3=\dfrac{9\pi}{2}$.

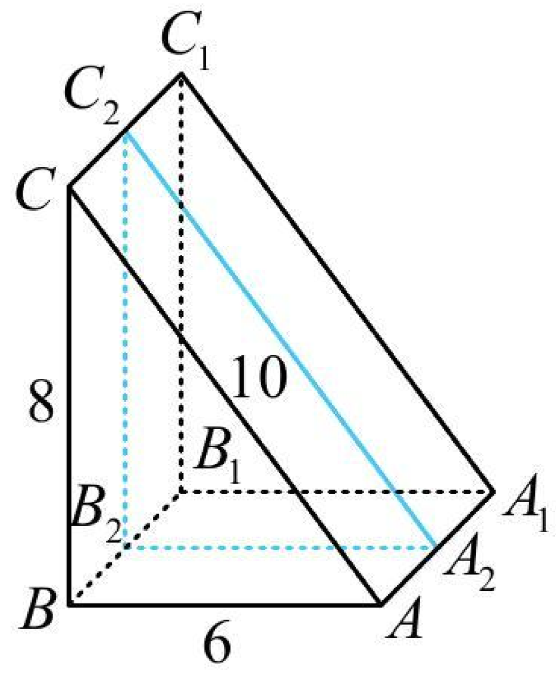


图1

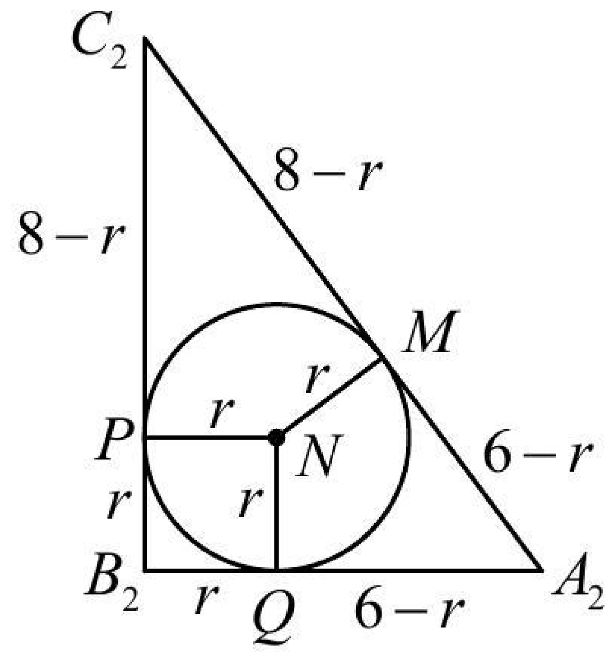


图2